Tester la troisième loi de Kepler

Niveau terminale

Benjamin Mollier

Lors de cette séance, les élèves testent, à l'aide de données réelles, la 3e loi de Kepler. Ils en déduisent la masse d'étoiles.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Lois de Kepler. Période de révolution.	**Capacité numérique :** Exploiter, à l'aide d'un langage de programmation, des données astronomiques ou satellitaires pour tester les deuxième et troisième lois de Kepler.
Incertitude-type.	Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).
Incertitudes-types grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs dont les composées.	Évaluer, à l'aide d'une formule fournie, l'incertitude-type d'une incertitudes-types associées sont connues.
Écriture du résultat.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.

Description de l'activité proposée aux élèves

Le professeur peut contextualiser cette séance sur la situation de son choix. Les éléments de contextualisation ne sont pas l'objet du présent document qui centre son analyse sur l'exploitation des données expérimentales chargées par les élèves.

Lors de cette séance, les élèves se rendent sur le site exoplanet.eu et chargent, depuis le catalogue, les données concernant certains systèmes exoplanétaires (exemples : Trappist-1, HD 34445, HD 40307, GJ 667 C, HD 10180, Kepler-11, HD 20794, Kepler-20, HD 219134, Kepler-90). Ils exploitent ensuite ces données à l'aide d'un tableur ou d'un langage de programmation.

Le professeur donne aux élèves la troisième loi de Kepler et énonce le travail à effectuer.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Travail à effectuer

Charger des données astrophysiques réelles ; chercher les grandeurs utiles et les convertir en unités du système international ; déterminer, à l'aide de la 3e loi de Kepler, la masse de l'étoile autour de laquelle gravite le système exoplanétaire ; vérifier la compatibilité des données avec la masse obtenue.

Qu'entend-on par tester une loi ?

Après avoir choisi un système exoplanétaire, les élèves utilisent la 3e loi de Kepler pour déterminer la masse de l'étoile. Les élèves utilisent ensuite les incertitudes sur chaque grandeur fournies dans le catalogue pour vérifier la compatibilité de ces grandeurs avec la masse obtenue.
Les mesures chargées par les élèves ne pourront en aucun cas déterminer si la loi testée est juste ou fausse. Les élèves pourront simplement dire si les résultats expérimentaux mettent en évidence un désaccord avec la loi testée, dans ce cas les résultats expérimentaux ne sont pas compatibles avec la loi testée. Cette conclusion aboutit à la remise en cause de la qualité de la donnée expérimentale choisi pour tester la loi.
Si aucun désaccord significatif n'est mis en évidence, alors les résultats sont compatibles avec la loi testée.

Présentation du protocole d'analyse des données sur le système solaire

Ce premier travail permet aux élèves de comprendre le principe de l'analyse des données et de l'évaluation de type A de l'incertitude.

Sur tableur
Chaque groupe d'élèves ouvrent la feuille de calcul systemeSolaire.ods et cherche à répondre à la question : quelle est la masse du Soleil ?

Système solaire		
	Période (jour)	Demi-grand axe(UA)
Mercure	87,969257175	0,3870993
Vénus	224,700799215	0,723336
Terre	365,25635535	1,000003
Mars	686,96797095	1,52371
Cérès (planète naine)	1680,09156	2,7658
Jupiter	4332,82012875	5,2029
Saturne	10755,6986445	9,537
Uranus	30687,1530015	19,189
Neptune	60190,02963	30,0699
Pluton (planète naine)	90589,5972	39,4821
Hauméa (planète naine)	104242,35	43,34
Makémaké (planète naine)	113190,975	45,79
Éris (planète naine)	203517,3	67,67

Pour répondre à cette question, les élèves commencent par convertir les données en unités du système international :

$$T(\text{en s}) = 24 \times 60 \times 60 \times T(\text{en jour})$$
$$a(\text{en m}) = 149597870700 \times a(\text{en UA})$$

Ils calculent ensuite, à l'aide de la 3e loi de Kepler, la masse du Soleil :

$$M_S = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{T^2}$$

Système solaire					
	Période (jour)	Demi-grand axe(UA)	T² (en s²)	a³ (m³)	M (kg)
Mercure	87,969257175	0,3870993	5,7768E+13	1,9420E+32	1,9897E+30
Vénus	224,700799215	0,723336	3,7691E+14	1,2671E+33	1,98973E+30
Terre	365,25635535	1,000003	9,9592E+14	3,3480E+33	1,98972E+30
Mars	686,96797095	1,52371	3,5229E+15	1,1844E+34	1,98983E+30
Cérès (planète naine)	1680,09156	2,7658	2,1071E+16	7,0833E+34	1,98966E+30
Jupiter	4332,82012875	5,2029	1,4014E+17	4,7153E+35	1,99149E+30
Saturne	10755,6986445	9,537	8,6358E+17	2,9041E+36	1,9904E+30
Uranus	30687,1530015	19,189	7,0298E+18	2,3656E+37	1,99171E+30
Neptune	60190,02963	30,0699	2,7044E+19	9,1027E+37	1,99218E+30
Pluton (planète naine)	90589,5972	39,4821	6,1261E+19	2,0605E+38	1,9908E+30
Hauméa (planète naine)	104242,35	43,34	8,1118E+19	2,7255E+38	1,98866E+30
Makémaké (planète naine)	113190,975	45,79	9,5643E+19	3,2143E+38	1,98917E+30
Éris (planète naine)	203517,3	67,67	3,0919E+20	1,0374E+39	1,98595E+30

Ils déterminent la moyenne $\overline{M_S} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M_{Sk}$ et l'écart-type expérimental $s_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N} (M_{Sk} - \overline{M_S})^2}$ de cette série. Ils poursuivent en déterminant l'écart-type sur la moyenne $u(\overline{M_S}) = \frac{s_{\text{exp}}}{\sqrt{N}}$. Les élèves présentent enfin le résultat sous la forme $M_S = 1{,}98992 \cdot 10^{30}$kg avec une incertitude-type de $0{,}00044 \cdot 10^{30}$kg. On donnera l'incertitude-type sur la moyenne à deux chiffres significatifs et on limitera la valeur moyenne à la même précision.

Système solaire					
	Période (jour)	Demi-grand axe(UA)	T² (en s²)	a³ (m³)	M (kg)
Mercure	87,969257175	0,3870993	5,7768E+13	1,9420E+32	1,9897E+30
Vénus	224,700799215	0,723336	3,7691E+14	1,2671E+33	1,98973E+30
Terre	365,25635535	1,000003	9,9592E+14	3,3480E+33	1,98972E+30
Mars	686,96797095	1,52371	3,5229E+15	1,1844E+34	1,98983E+30
Cérès (planète naine)	1680,09156	2,7658	2,1071E+16	7,0833E+34	1,98966E+30
Jupiter	4332,82012875	5,2029	1,4014E+17	4,7153E+35	1,99149E+30
Saturne	10755,6986445	9,537	8,6358E+17	2,9041E+36	1,9904E+30
Uranus	30687,1530015	19,189	7,0298E+18	2,3656E+37	1,99171E+30
Neptune	60190,02963	30,0699	2,7044E+19	9,1027E+37	1,99218E+30
Pluton (planète naine)	90589,5972	39,4821	6,1261E+19	2,0605E+38	1,9908E+30
Hauméa (planète naine)	104242,35	43,34	8,1118E+19	2,7255E+38	1,98866E+30
Makémaké (planète naine)	113190,975	45,79	9,5643E+19	3,2143E+38	1,98917E+30
Éris (planète naine)	203517,3	67,67	3,0919E+20	1,0374E+39	1,98595E+30
				M̄=	1,98992E+30
				s_{exp}=	1,57854E+27
				u(M̄)=	4,37808E+26

= moyenne(F3:F15)
= ecartype(F3:F15)
= F18/racine(nb(F3:F15))

Avec un langage de programmation (exemple avec python)

Chaque groupe d'élèves ouvrent le code python systemeSolaire.py et cherche à répondre à la question : quelle est la masse du Soleil ?

```
import numpy as np

T = [87.969257175,224.700799215,365.25635535,686.96797095,1680.09156,...
a = [0.3870993,0.723336,1.000003,1.52371,2.7658,5.2029,9.537,19.189,30.0699,...
G = 6.67e-11
```

Pour répondre à cette question, les élèves commencent par convertir les données en unités du système international :

$$T(\text{en s}) = 24 \times 60 \times 60 \times T(\text{en jour})$$
$$a(\text{en m}) = 149597870700 \times a(\text{en UA})$$

Ils calculent ensuite, à l'aide de la 3e loi de Kepler, la masse du Soleil :

$$M_S = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{T^2}$$

```
M = []
for i in range(len(T)):
    T2 = (86400*T[i])**2
    a3 = (149597870700*a[i])**3
    M.append((4*np.pi**2*a3)/(G*T2))
```

Ils déterminent la moyenne $\overline{M_S} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M_{Sk}$ et l'écart-type expérimental $s_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N} (M_{Sk} - \overline{M_S})^2}$ de cette série. Ils poursuivent en déterminant l'écart-type sur la moyenne $u(\overline{M_S}) = \frac{s_{\text{exp}}}{\sqrt{N}}$. Les élèves présentent enfin le résultat sous la forme $M_S = 1{,}98992 \cdot 10^{30}\text{kg}$ avec une incertitude-type de $0{,}00044 \cdot 10^{30}\text{kg}$. On donnera l'incertitude-type sur la moyenne à deux chiffres significatifs et on limitera la valeur moyenne à la même précision.

```
Mmoy = np.mean(M)
sexp = np.std(M,ddof=1) # ddof=1 nécessaire pour obtenir l'écart-type
expérimental
uM = sexp/np.sqrt(len(M))

print(Mmoy,'kg, avec une incertitude-type',uM,'kg')
```

Analyse d'un système exoplanétaire : détermination en autonomie de la masse d'un étoile.

Ce premier travail effectué, les élèves chargent les données d'un premier système exoplanétaire sur le site exoplanet.eu (par exemple le système TRAPPIST-1 à 7 exoplanètes) au format CSV. Ils extraient les grandeurs utiles (orbital_period, semi_major_axis) puis les collent dans un tableur ou dans un fichier python. L'enseignant peut aider les élèves pendant cette phase.
Les élèves sont ensuite laissés en autonomie afin de déterminer la masse de l'étoile comme décrit dans le paragraphe précédent.

	Trappist-1				
	Période (jour)	Demi-grand axe(UA)	T² (en s²)	a³ (m³)	M (kg)
Trappist-1b	1,511	0,012	1,7043E+10	5,7852E+27	2,00908E+29
Trappist-1c	2,422	0,016	4,3790E+10	1,3713E+28	1,85351E+29
Trappist-1d	4,05	0,022	1,2244E+11	3,5649E+28	1,72322E+29
Trappist-1e	6,1	0,029	2,7777E+11	8,1653E+28	1,73987E+29
Trappist-1f	9,207	0,038	6,3280E+11	1,8371E+29	1,71829E+29
Trappist-1g	12,353	0,046	1,1391E+12	3,2587E+29	1,69321E+29
Trappist-1h	20	0,063	2,9860E+12	8,3714E+29	1,65937E+29
				$\overline{M}$=	1,77094E+29
				s_{exp}=	1,21128E+28
				u($\overline{M}$)=	4,57819E+27

= moyenne(F3:F9)
= ecartype(F3:F9)
= F12/racine(nb(F3:F9))

Les élèves obtiennent, sur cet exemple, $M = 1{,}771 \cdot 10^{29}\text{kg}$ avec une incertitude-type de $0{,}046 \cdot 10^{29}\text{kg}$. Cet exemple peut être l'occasion pour l'enseignant de parler d'ordre de grandeur. On constate par exemple que l'étoile Trappist-1 possède une masse d'un ordre de grandeur en-dessous de celle du Soleil.

D'autres exemples de systèmes :
- avec 6 exoplanètes, HD 34445, HD 40307, GJ 667 C, HD 10180, Kepler-11, HD 20794, Kepler-20, HD 219134 ;
- avec 8 exoplanètes Kepler-90.

Analyse d'un système exoplanétaire : compatibilité des données avec le résultats

Dans cette partie plus technique, les élèves sont amenés à vérifier la compatibilité des données avec le résultat calculé avec la 3e loi de Kepler. Pour chaque grandeur utilisée, les élèves récupèrent la colonne des incertitudes. Ils déterminent, à l'aide de la formule de propagation des incertitudes, celle sur chaque valeur de masse M_k, puis détermine son écart à la valeur moyenne.
C'est l'occasion de voir qu'une mesure, dans une publication scientifique, est toujours accompagnée de son incertitude.

Sur tableur
Les élèves ajoutent les colonnes orbital_period_error_max et semi_major_axis_error_max représentant les incertitude-types sur les périodes et les demi grand-axes.

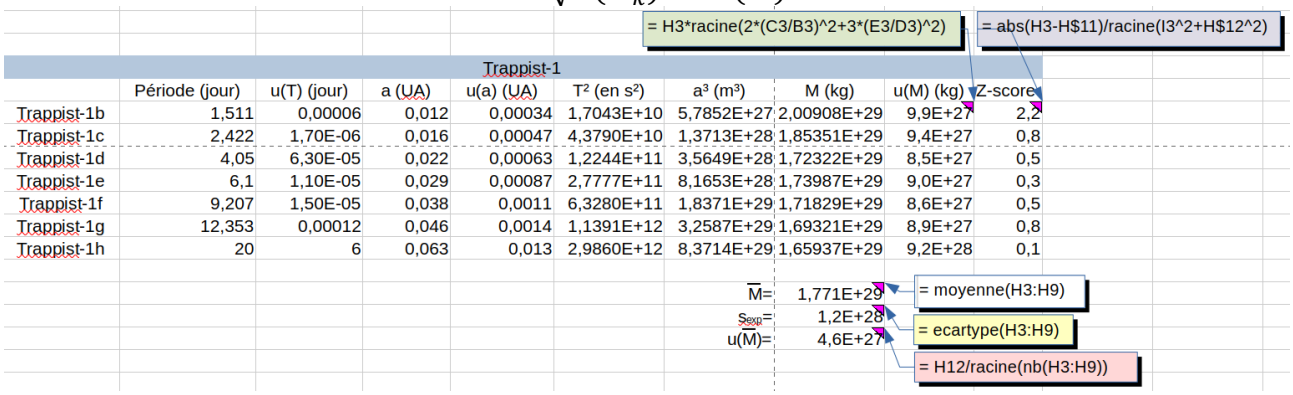
Trappist-1				
	Période (jour)	u(T) (jour)	Demi-grand axe (UA)	u(a) (UA)
Trappist-1b	1,511	0,00006	0,012	0,00034
Trappist-1c	2,422	1,70E-06	0,016	0,00047
Trappist-1d	4,05	6,30E-05	0,022	0,00063
Trappist-1e	6,1	1,10E-05	0,029	0,00087
Trappist-1f	9,207	1,50E-05	0,038	0,0011
Trappist-1g	12,353	0,00012	0,046	0,0014
Trappist-1h	20	6	0,063	0,013

Ils calculent ensuite les incertitudes sur les masses à l'aide de la formule de propagation des incertitudes :

$$u(M_k) = M_k \times \sqrt{2 \cdot (\frac{u(T)}{T})^2 + 3 \cdot (\frac{u(a)}{a})^2}$$

puis l'écart normalisé à la moyenne

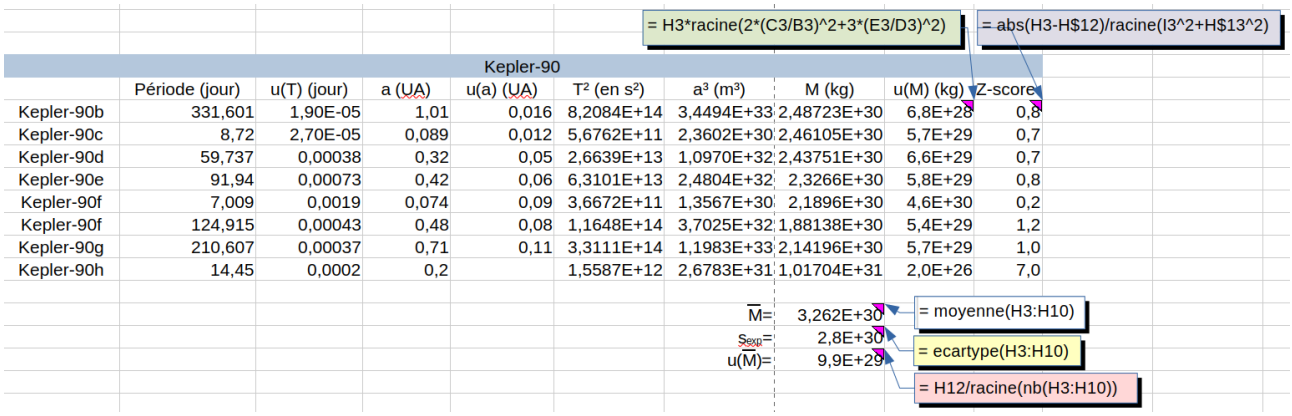
$$z = \frac{|M_k - M|}{\sqrt{u(M_k)^2 + u(\bar{M})^2}}$$



Trappist-1									
	Période (jour)	u(T) (jour)	a (UA)	u(a) (UA)	T² (en s²)	a³ (m³)	M (kg)	u(M) (kg)	Z-score
Trappist-1b	1,511	0,00006	0,012	0,00034	1,7043E+10	5,7852E+27	2,00908E+29	9,9E+27	2,2
Trappist-1c	2,422	1,70E-06	0,016	0,00047	4,3790E+10	1,3713E+28	1,85351E+29	9,4E+27	0,8
Trappist-1d	4,05	6,30E-05	0,022	0,00063	1,2244E+11	3,5649E+28	1,72322E+29	8,5E+27	0,5
Trappist-1e	6,1	1,10E-05	0,029	0,00087	2,7777E+11	8,1653E+28	1,73987E+29	9,0E+27	0,3
Trappist-1f	9,207	1,50E-05	0,038	0,0011	6,3280E+11	1,8371E+29	1,71829E+29	8,6E+27	0,5
Trappist-1g	12,353	0,00012	0,046	0,0014	1,1391E+12	3,2587E+29	1,69321E+29	8,9E+27	0,8
Trappist-1h	20	6	0,063	0,013	2,9860E+12	8,3714E+29	1,65937E+29	9,2E+28	0,1
						$\bar{M}$=	1,771E+29		
						s_{exp}=	1,2E+28		
						u($\bar{M}$)=	4,6E+27		

Ici, toutes les valeurs sont compatibles à moins de 3 incertitudes-types.

Pour aller plus loin. Un jeu de données intéressant est celui de Kepler-90. En effet, l'une des exoplanètes donne une valeur non compatible :



Kepler-90									
	Période (jour)	u(T) (jour)	a (UA)	u(a) (UA)	T² (en s²)	a³ (m³)	M (kg)	u(M) (kg)	Z-score
Kepler-90b	331,601	1,90E-05	1,01	0,016	8,2084E+14	3,4494E+33	2,48723E+30	6,8E+28	0,8
Kepler-90c	8,72	2,70E-05	0,089	0,012	5,6762E+11	2,3602E+30	2,46105E+30	5,7E+29	0,7
Kepler-90d	59,737	0,00038	0,32	0,05	2,6639E+13	1,0970E+32	2,43751E+30	6,6E+29	0,7
Kepler-90e	91,94	0,00073	0,42	0,06	6,3101E+13	2,4804E+32	2,3266E+30	5,8E+29	0,8
Kepler-90f	7,009	0,0019	0,074	0,09	3,6672E+11	1,3567E+30	2,1896E+30	4,6E+30	0,2
Kepler-90f	124,915	0,00043	0,48	0,08	1,1648E+14	3,7025E+32	1,88138E+30	5,4E+29	1,2
Kepler-90g	210,607	0,00037	0,71	0,11	3,3111E+14	1,1983E+33	2,14196E+30	5,7E+29	1,0
Kepler-90h	14,45	0,0002	0,2		1,5587E+12	2,6783E+31	1,01704E+31	2,0E+26	7,0
						$\overline{M}$=	3,262E+30		
						s_{exp}=	2,8E+30		
						u($\overline{M}$)=	9,9E+29		

Comment interpréter cette non-compatibilité ? Tout d'abord, il manque l'incertitude-type sur le demi grand axe. Le z-score est alors surestimé. De plus, a proximité de cette exoplanète avec son étoile rend difficile l'estimation de ce demi grand-axe. On trouve en effet, sur le site de la NASA, une estimation plus récente à 0,12 UA. Cet exemple montre que la science se construit tous les jours.

Avec un langage de programmation

Les élèves ajoutent le contenu des colonnes orbital_period_error_max et semi_major_axis_error_max dans des listes.

```
import numpy as np

T = [1.511,2.422,4.05,6.1,9.207,12.353,20]
uT = [0.00006,1.70E-06,6.30E-05,1.10E-05,1.50E-05,0.00012,6]
a = [0.012,0.016,0.022,0.029,0.038,0.046,0.063]
ua = [0.00034,0.00047,0.00063,0.00087,0.0011,0.0014,0.013]
G = 6.67e-11
```

Ils calculent ensuite les incertitudes sur les masses à l'aide de la formule de propagation des incertitudes :

$$u(M_k) = M_k \times \sqrt{2 \cdot (\frac{u(T)}{T})^2 + 3 \cdot (\frac{u(a)}{a})^2}$$

puis l'écart normalisé à la moyenne

$$z = \frac{|M_k - M|}{\sqrt{u(M_k)^2 + u(\bar{M})^2}}$$

```
uMk = []
zscore = []
for i in range(len(M)):
    uMk.append(M[i]*np.sqrt(2*(uT[i]/T[i])**2+3*(ua[i]/a[i])**2))
    zscore.append(abs(M[i]-Mmoy)/np.sqrt(uMk[i]**2+uM**2))

print(uMk,zscore)
```

Conclusion

À rédiger...